ANÁLISIS VECTORIAL
CAP 2: VECTORES EN 2D
MÉTODOS ANALÍTICOS PARTE 2

Por Félix Aucallanchi Velásquez

03.- Si se cumple que: $|\bar{A}+\bar{B}|=2|\bar{A}-\bar{B}|$ y además: $2|\bar{A}|=|\bar{B}|$, calcular el coseno del ángulo formado por los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

A) $-\frac{3}{8}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

Hacemos: A = k, B = 2k

$$|\bar{A}+\bar{B}|=2|\bar{A}-\bar{B}| \quad \rightarrow \quad R=2D \ \ldots(*)$$

$$\text{i) } R=\sqrt{A^2+B^2+2\,A\cdot B\cdot\cos\theta}$$

$$R=\sqrt{k^2+(2k)^2+2\,k\cdot 2k\cdot\cos\theta}=\sqrt{5k^2+4\,k^2\cos\theta}$$

$$\text{ii) } D=\sqrt{A^2+B^2-2\,A\cdot B\cdot\cos\theta}$$

$$D=\sqrt{k^2+(2k)^2-2\cdot k\cdot 2k\cdot\cos\theta}=\sqrt{5k^2-4k^2\cos\theta}$$

Reemplazando en (*):

$$\sqrt{5k^2+4\,k^2\cos\theta}=2\sqrt{5k^2-4\,k^2\cos\theta}$$

Elevando al cuadrado:

$$5\cancel{k^2}+4\,\cancel{k^2}\cos\theta=4\left(5\cancel{k^2}-4\,\cancel{k^2}\cos\theta\right)$$

$$5+4\cos\theta=20-16\cos\theta$$

$$20\cos\theta=15$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{3}{4}$$

Resp: D

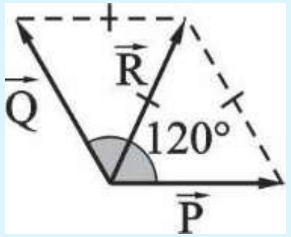
04.- Se tiene dos vectores de igual módulo «A» y su resultante tiene el mismo módulo que ellos. Si a un vector se le multiplica por tres y al otro por menos cinco, ¿cuál es el módulo de su resultante? Considere: $A = 2$.

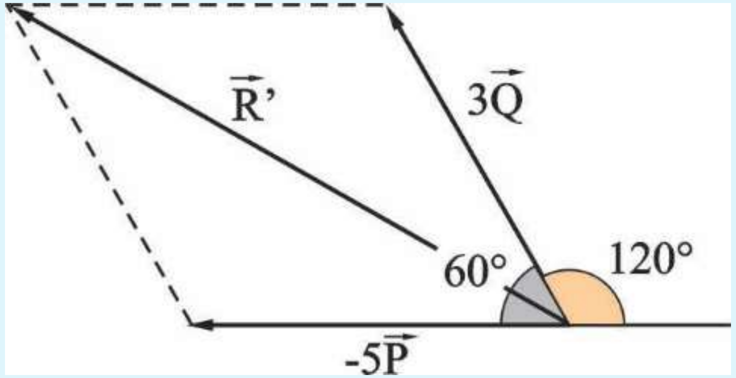
A) 12 B) 10 C) 14 D) 8 E) 9

Sean P y Q los vectores y R su resultante.
Por condición:

$$|\bar{P}| = |\bar{Q}| = |\bar{R}|$$

entonces los vectores P y Q forman 120°.





$$R' = \sqrt{(3Q)^2 + (5P)^2 + 2(3Q)(5P)\cos 60°}$$

$$R' = \sqrt{(3A)^2 + (5A)^2 + \cancel{2}(3A)(5A)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}$$

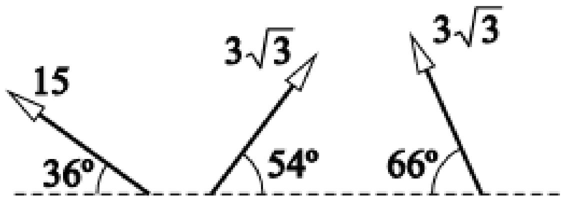
$$R' = \sqrt{9A^2 + 25A^2 + 15A^2}$$

$$R' = \sqrt{49A^2} \rightarrow R' = 7A \rightarrow R' = 7(2)$$

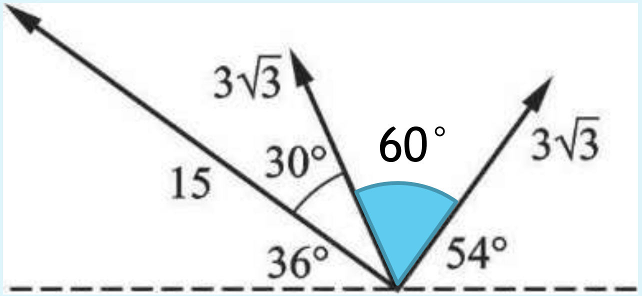
$$\therefore\ R' = 14$$

Resp: C

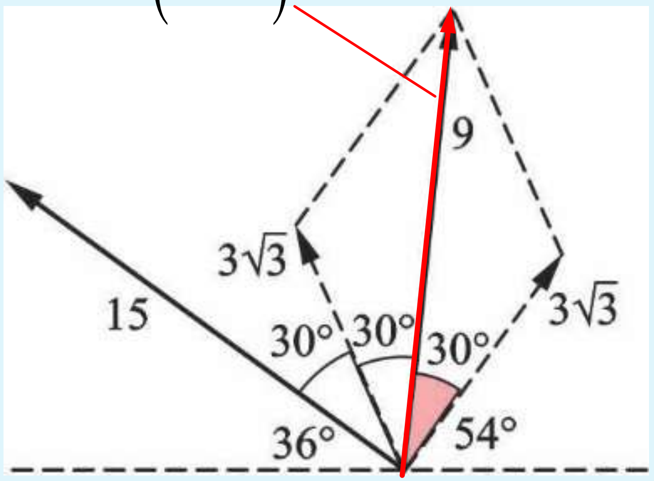
06.- Determinar el módulo de la resultante del siguiente conjunto de vectores.



A) 21 B) 24 C) 14 D) 29 E) 30



$$a\sqrt{3} = \left(3\sqrt{3}\right)\sqrt{3}$$



$$R = \sqrt{15^2 + 9^2 + 2 \cdot 15 \cdot 9 \cos 60^\circ}$$

$$R = \sqrt{225 + 81 + \cancel{2} \cdot 135 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$R = \sqrt{441}$$

$$\therefore\ R = 21$$

Resp: A

11.- Si: $\left|\bar{A}-\frac{2}{3}\bar{B}\right|=10$ y $|2\bar{A}+3\bar{B}|=25$, se pide evaluar: $\boxed{|7\bar{A}+4\bar{B}|.}$

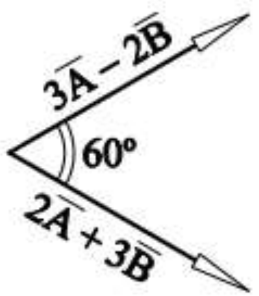
A) 50

B) 60

C) 70

D) 80

E) 90



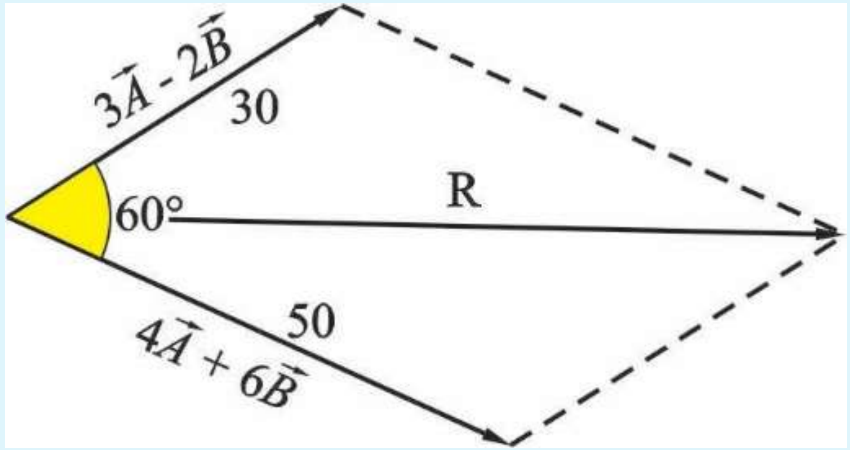
$$\left|\bar{A}-\frac{2}{3}\bar{B}\right|=10$$

$$3\cdot\left|\bar{A}-\frac{2}{3}\bar{B}\right|=3\cdot 10 \quad\rightarrow\quad |3\bar{A}-2\bar{B}|=30$$

$$|2\bar{A}+3\bar{B}|=25$$

$$2\cdot|2\bar{A}+3\bar{B}|=2\cdot 25 \qquad |4\bar{A}+6\bar{B}|=50$$

$$\left(3\bar{A}-2\bar{B}\right)+\left(4\bar{A}+6\bar{B}\right)=\left(7\bar{A}+4\bar{B}\right)$$



$$|\bar{R}|=\sqrt{30^2+50^2+2\cdot 30\cdot 50\cdot\cos 60^{o}}$$

$$|\bar{R}|=\sqrt{900+2500+\cancel{2}\cdot 1500\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}$$

$$|\bar{R}|=\sqrt{4900}$$

$$\therefore\quad |\bar{R}|=70$$

Resp: C

08.- Dados los vectores de la figura, se pide determinar: $\overline{R} = \overline{A} + 2\overline{B} + \overline{C}$.

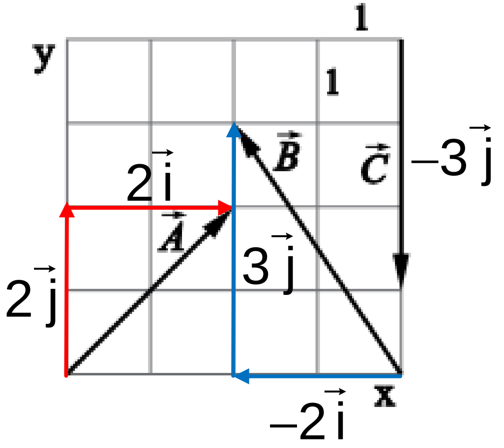
A) $3\vec{i} + 4\vec{j}$

B) $4\vec{i} - 3\vec{j}$

C) $2\vec{i} + 3\vec{j}$

D) $-2\vec{i} + 5\vec{j}$

E) $-3\vec{i} + 4\vec{j}$



$$\vec{A} = 2\vec{i} + 2\vec{j}\,;\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j}\ ;\vec{C} = -3\vec{j}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + 2\vec{B} + \vec{C}$$

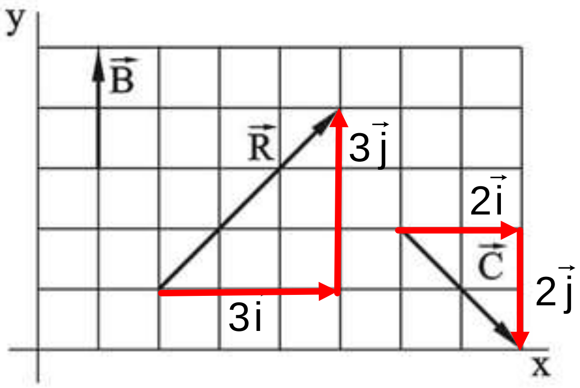
$$\vec{R} = \left(2\vec{i} + 2\vec{j}\right) + 2\left(-2\vec{i} + 3\vec{j}\right) + \left(-3\vec{j}\right)$$

$$\vec{R} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{j}$$

$$\therefore \quad \vec{R} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$$

Resp: D

07. En el gráfico mostrado las cuadrículas miden la unidad.



Se sabe que: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, y se pide determinar:

a) La expresión vectorial cartesiana de $\vec{A}$
b) El ángulo direccional de $\vec{A}$

A) $\vec{A} = -3\vec{i} + 3\vec{j};\ \theta = \tan^{-1}(-1)$

B) $\vec{A} = 1\vec{i} + 3\vec{j};\ \theta = \tan^{-1}(3)$

C) $\vec{A} = -1\vec{i} + 2\vec{j};\ \theta = \tan^{-1}(-2)$

D) $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j};\ \theta = \tan^{-1}(3/2)$

E) $\vec{A} = 1\vec{i} + 3\vec{j};\ \theta = \tan^{-1}(1/3)$

Datos: $\vec{B} = 0\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{C} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{R} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$

a) $\vec{R} = \sum \vec{V} \quad \rightarrow \quad \vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$$3\vec{i} + 3\vec{j} = \vec{A} + \cancel{2\vec{j}} + 2\vec{i} - \cancel{2\vec{j}} \quad \rightarrow \quad \therefore \quad \vec{A} = 1\vec{i} + 3\vec{j}$$

b) $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{A_y}{A_x}\right) \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{1}\right)$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(3)$ **Resp: B**

14.- ¿Qué ángulo forma la resultante con el eje de las «x»? $\tan\alpha = 2\sqrt{3}$.

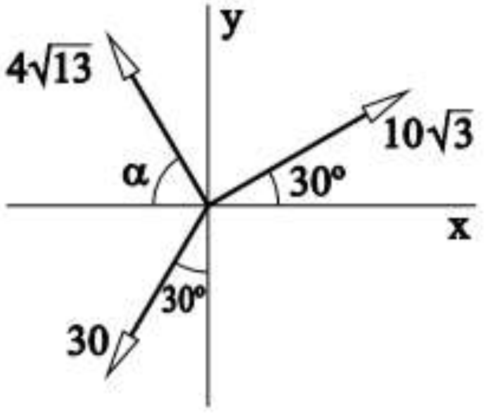
A) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

B) $\tan^{-1}(\sqrt{2})$

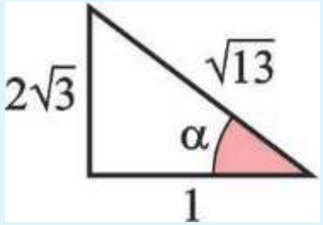
C) $\tan^{-1}(\sqrt{6})$

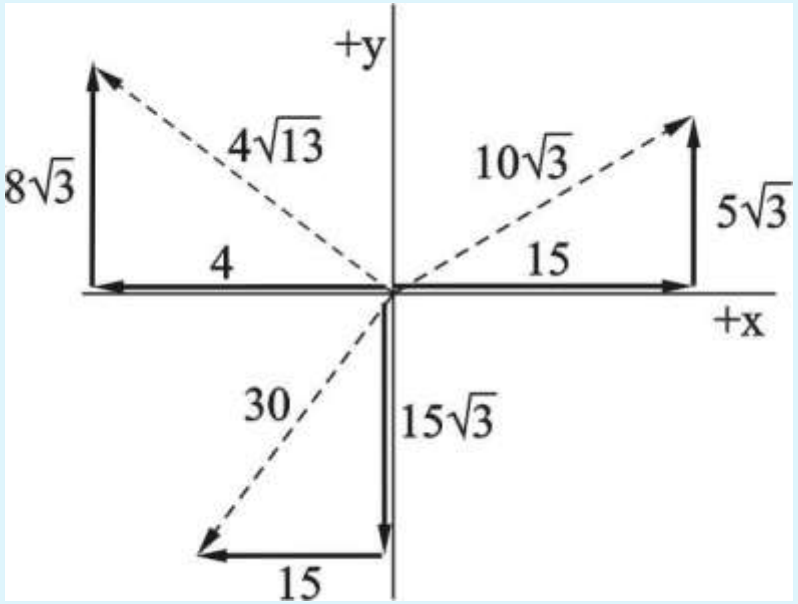
D) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

E) 25°



$$\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{1}$$





$$R_x = \sum V_x = 15 - 15 - 4 \quad \rightarrow \quad R_x = -4$$

$$R_y = \sum V_y = 8\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 5\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad R_y = -2\sqrt{3}$$

Ahora determinamos el ángulo direccional:

$$\theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad \rightarrow \quad \theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{-4}\right)$$

$$\therefore \quad \theta_R = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Resp: D

Observación:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 40{,}9^\circ$$

$$\therefore \quad \theta_R \approx 220{,}9^\circ$$